Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques

Exercice 1 [00944] [correction]
Exprimer la fonction $\theta \mapsto \sin^{2n} \theta$ sur la base $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ (avec $e_k : \theta \mapsto \mathrm{e}^{ik\theta}$).
En déduire la valeur de

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta \mathrm{d}\theta$$

Exercice 2 [00945] [correction]
Soient $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ non tous nuls et

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$$

a) Etablir

$$\int_{-1}^{1} (P(t))^2 \mathrm{d}t = -i \int_0^{\pi} (P(\mathrm{e}^{i\theta}))^2 \mathrm{e}^{i\theta} \mathrm{d}\theta$$

b) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{a_n a_m}{n+m+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{N} a_k^2$$

Exercice 3 Mines-Ponts MP [02877] [correction]
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $p_n(x) = (1+\cos x)^n$ puis

$$q_n(x) = \frac{p_n(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} p_n(t)\,\mathrm{d}t}$$

a) Montrer que pour tout $\delta \in \left]0, \pi\right[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique et continue. On pose

$$g_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Prouver la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ vers f de (g_n).
c) Quel résultat redémontre-t-on ainsi ?

Exercice 4 X MP [03042] [correction]
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) \subset U$ où $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

Exercice 5 [00946] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique et continue par morceaux.
Montrer la convergence de la série

$$\sum \frac{|c_n(f)|}{n}$$

Exercice 6 [00947] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique continue.
a) Montrer que si f de classe $\mathcal{C}^1$ alors $c_n(f) = o(1/n)$ quand $|n| \to +\infty$
b) Etablir que si $c_n(f) = O\left(1/|n|^\alpha\right)$ quand $|n| \to +\infty$ avec $\alpha > 2$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 7 [00948] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continue.
a) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^p$ alors $c_{|n|}(f) = o\left(1/n^p\right)$.
b) Inversement justifier que si $c_{|n|}(f) = O\left(1/n^{p+2}\right)$ alors f est de classe $\mathcal{C}^p$.

Exercice 8 [00949] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodique.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x-y|^\alpha$$

a) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, exprimer

$$\int_0^{2\pi} f(t+a)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

en fonction de $c_n(f)$.
b) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |c_n(f)| \leqslant \frac{\mu}{|n|^\alpha}$$

Exercice 9 [00950] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique.
Montrer que f est constante si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{Z}^\star$, $c_n(f) = 0$.

Développement en série de Fourier

Exercice 10 [00951] [correction]
Soit f une fonction continue 2π périodique. On suppose que la série de Fourier de f converge uniformément. Montrer que celle-ci converge vers f.

Exercice 11 [00952] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction régularisée, 2π périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$.
a) Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
b) Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier vers f.
c) En déduire

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \text{ et } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

d) Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 12 [00953] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π périodique, paire, telle que

$$\forall x \in [0, \pi]\,, f(x) = x$$

a) Calculer la série de Fourier de f.
b) Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f.
c) Déterminer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

d) En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 13 [03176] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique, définie par

$$f(t) = \begin{cases} 4x^2 - \pi^2 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer exprimer sa dérivée.
b) Calculer les coefficients de Fourier trigonométrique de la fonction f.
c) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 14 [00954] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique définie par

$$f(x) = |\cos x|$$

a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
b) En déduire la valeur

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$$

Exercice 15 [00955] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ sur }]0, \pi]$$

a) Justifier que f est développable en série de Fourier et former ce développement.
b) En déduire la convergence et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

c) Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 16 [00956] [correction]
Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π périodique définie par

$$\forall x\in\left]-\pi,\pi\right],f(x)=\mathrm{e}^x$$

a) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
b) En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\text{ et }\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 17 [00957] [correction]
Soient $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π périodique définie par

$$f(x)=\cos(\alpha x)\text{ sur }\left]-\pi,\pi\right]$$

a) Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
b) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}$$

c) En déduire enfin la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Exercice 18 [00958] [correction]
Soient $\alpha\in\mathbb{R}^\star$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π périodique définie par $f(x)=\mathrm{ch}(\alpha x)$ sur $\left]-\pi,\pi\right]$.
a) Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
b) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\alpha^2}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}$$

Exercice 19 [00959] [correction]
a) Domaine de définition de

$$S(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k^2-t^2}?$$

b) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de $f(x)=\cos(\alpha x)$ définie sur $[-\pi,\pi]$ avec $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
c) Sur quel domaine f coïncide avec son développement en série de Fourier ?
d) En déduire une expression de $S(t)$.

Exercice 20 [00960] [correction]
Existe-t-il une suite (α_n) de réels telle que

$$\forall t\in[0,\pi],\sin t=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\cos(nt)?$$

Exercice 21 [00961] [correction]
La série de Fourier de la fonction f paire 2π-périodique qui vaut $\sqrt{x}$ pour $x\in[0,\pi]$ converge-t-elle uniformément ? Que vaut sa somme ?

Exercice 22 Mines-Ponts MP [02883] [correction]
Soit α un réel non entier.
a) En utilisant la fonction 2π-périodique coïncidant avec $x\mapsto\cos(\alpha x)$ sur $[-\pi,\pi]$, calculer

$$1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$$

b) En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

c) Ici $0<\alpha<1$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

Exercice 23 Mines-Ponts MP [02884] [correction]
Soient $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et f_α l'unique fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in[-\pi,\pi]$, $f_\alpha(x)=\cos(\alpha x)$.
a) Calculer les coefficients de Fourier de f_α.
b) Montrer que

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}=1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}$$

c) Si $0 < \alpha < 1$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Exercice 24 Mines-Ponts MP [02885] [correction]
Soit $a > 0$, x réel. On pose

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + (x - 2n\pi)^2}$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
b) Montrer que f est développable en série de Fourier.
c) Calculer, en utilisant un logiciel de calcul formel, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{b^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$$

d) En déduire les coefficients de Fourier de f.
e) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 25 [03227] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant

$$0 < x < \pi \Rightarrow f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

a) Calculer

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire, continue et définie par

$$g \text{ est affine sur } [0,1] \text{ et } \forall x \in [1,\pi], g(x) = S(x)$$

Démontrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

c) Que vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}?$$

Applications des séries de Fourier

Exercice 26 [00969] [correction]
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues et paires. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$h(x) = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)a_n(g)\cos(nx)$$

Justifier que h existe, est continue et calculer ses coefficients de Fourier réels.
Etablir que

$$\|h\|_\infty \leqslant 2\,\|f\|_\infty\,\|g\|_\infty$$

Exercice 27 [00970] [correction]
Pour $\theta \in \left]0,\pi\right[$, calculer de deux manières la partie réelle de

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\right)\mathrm{d}t$$

afin d'en déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$$

Exercice 28 X MP [00418] [correction]
α désigne un réel de l'intervalle $\left]0,\pi\right[$ et f la fonction 2π périodique définie sur $\left]-\pi,\pi\right]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Etudier la série de Fourier de f ainsi que sa convergence.
b) Que vaut la somme de cette série pour $x = 0$, pour $x = \alpha$?
c) Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$$

d) Justifier et calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 29 [03099] [correction]
a) On note g la fonction 2π-périodique définie par $g(t) = \pi - t$ sur $[0, 2\pi[$.
Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de g.
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique.
Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Etablir que l'identité est encore vraie pour f seulement continue par morceaux.

Exercice 30 Mines-Ponts MP [02886] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que

$$f(0) = f(\pi) = 0 \text{ et } \int_0^\pi f'^2 = 1$$

Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \text{ et } \forall x \in [0, \pi], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin(nx)$$

Exercice 31 Centrale MP [03250] [correction]
Soit f la somme sur $\mathbb{C}$ de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

supposée de rayon de convergence $R = +\infty$.
Pour $r \geqslant 0$, on pose

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

et on suppose l'existence de

$$\ell = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{r}$$

a) On suppose que $\ell > 1$. Montrer la divergence de la série $\sum a_n$.
b) En utilisant les coefficients de Fourier de l'application $t \mapsto f(r\mathrm{e}^{it})$, montrer

$$|a_n| \leqslant M(r) \frac{n!}{r^n}$$

c) En déduire que, si $\ell < 1$, la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 32 Centrale MP [03257] [correction]
f désigne une fonction réelle continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$.
a) Démontrer que la suite de fonction $(F_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^n f(x+t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge vers une fonction F.
On précisera la définition de F en fonction de f ainsi que le mode de convergence de la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$
b) Démontrer

$$\|F\|_\infty \leqslant F(0)$$

Développement trigonométrique

Exercice 33 [00962] [correction]
Soit $t \in]-1, 1[$. Former le développement en série de Fourier de la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2}$$

Exercice 34 [00964] [correction]
Former le développement en série de Fourier de

$$x \mapsto \mathrm{e}^{\cos x} \cos(\sin x)$$

Exercice 35 [00966] [correction]
Pour $|z| < 1$, calculer

$$\int_0^\pi \frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2} \cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 36 [00968] [correction]
Calculer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)!}$$

Exercice 37 [03326] [correction]
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique donnée par

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{it}}$$

a) Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
b) Etablir

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos t}\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

Noyau de Poisson

Exercice 38 [03093] [correction]
[Noyau de Poisson]
Soient $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
a) Calculer

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{in\theta} r^{|n|}$$

b) Déterminer la série de Fourier trigonométrique de la fonction

$$f_r : t \mapsto \frac{1}{1 - 2r\cos t + r^2}$$

Exercice 39 [00963] [correction]
a) Soit $x \in \,]0, \pi[$. Former le développement en série entière en 0 de

$$t \mapsto \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos x + t^2}$$

b) En déduire le développement en série de Fourier de

$$x \mapsto \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha\cos x}$$

pour $\alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 40 [03102] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue de coefficients de Fourier exponentiels c_n, $n \in \mathbb{Z}$.
a) Soit $r \in \,]0, 1[$. Déterminer une fonction $g_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(t)\overline{g_r(t)}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que la fonction g_r est à valeurs réelles positives.
c) On suppose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n \in \mathbb{R}^+$$

Montrer que la série de Fourier de f converge. Que vaut sa somme ?

Exercice 41 Mines-Ponts MP [02887] [correction]
Soient $r \in \,]0, 1[$ et E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
a) Montrer qu'il existe une fonction $P_r \in E$ telle que : pour tout $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} c_n(f) \mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(x - t)\,\mathrm{d}t$$

b) Calculer

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Calculer

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} c_n(f) \mathrm{e}^{inx}$$

Exercice 42 [03328] [correction]
Pour $r \in \,]0, 1[$, on définit la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$k(x) = 1 + 2\sum_{p=1}^{+\infty} r^p \cos(px)$$

a) Montrer que la fonction k est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
On note E l'espace des fonctions continues 2π-périodique. Pour $f \in E$, on pose

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(x - t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Exprimer $F(x)$ à l'aide des coefficients de Fourier de f.
En déduire que F est élément de E et exprimer ses coefficients de Fourier en fonction de ceux de f.

Inégalités et séries de Fourier

Exercice 43 [00965] [correction]
[Inégalité de Wirtinger]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\int_0^{2\pi} f = 0$$

a) Relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$?
b) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

et préciser les cas d'égalités.

Exercice 44 [00433] [correction]
[Inégalité de Poincaré]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Etablir

$$\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t$$

Observer que la constante de majoration ne peut être améliorée.

Exercice 45 [02752] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant

$$\int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

Montrer que

$$\|f\|_\infty^2 \leqslant \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t$$

Séries de Fourier et équations différentielles

Exercice 46 [00967] [correction]
Déterminer les solutions 2π périodiques de l'équation différentielle

$$y'' + \mathrm{e}^{it} y = 0$$

Exercice 47 CCP MP [03331] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{Z}$ et f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique.
Soit y solution de l'équation

$$y' + \alpha y = f$$

a) Montrer que y est de la forme

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} \left(y(0) + \int_0^x f(t) \mathrm{e}^{\alpha t} \mathrm{d}t \right)$$

b) Montrer que y est 2π-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(2\pi)$ (on pourra utiliser que $z(x) = y(x + 2\pi)$ est solution de l'équation différentielle).
c) En déduire qu'il existe une unique fonction ϕ, 2π-périodique solution de l'équation différentielle.
d) Montrer que ϕ admet un développement en série de Fourier et l'exprimer en fonction des coefficients complexes de f.

Exercice 48 [03327] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique dérivable telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t + \lambda) \ (*)$$

a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (in - \mathrm{e}^{in\lambda}) c_n(f) = 0$$

b) Pour quel(s) $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il des fonctions 2π-périodiques, autres que la fonction nulle, vérifiant (*) ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Par la formule du binôme

$$\sin^{2n}\theta = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{2(n-k)i\theta}$$

On en déduit

$$4I_n = \int_0^{2\pi}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}2\pi$$

puis

$$I_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 : [énoncé]
a) $\int_0^\pi (P(\mathrm{e}^{i\theta}))^2\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{i}Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right]_0^\pi = -i\left[Q(t)\right]_{-1}^1 = \int_{-1}^1 (P(t))^2\mathrm{d}t$ avec Q une primitive de P^2.
b) $\int_{-1}^1 (P(t))^2\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 (P(t))^2\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^N\sum_{m=0}^N \frac{a_n a_m}{n+m+1}$ et
$\left|-i\int_0^\pi (P(\mathrm{e}^{i\theta}))^2\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^\pi \left|P(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta = \pi\sum_{k=0}^N a_k^2$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Pour $\delta\in\left]0,\pi\right[$

$$\left|\int_\delta^\pi q_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\int_\delta^\pi (1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^\pi (1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{\int_\delta^\pi (1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}{\int_{-\delta}^\delta (1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{\int_\delta^\pi (1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}{2\delta(1+\cos\delta)^n}$$

Or par convergence dominée

$$\frac{\int_\delta^\pi (1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}{(1+\cos\delta)^n} = \int_\delta^\pi\left(\frac{1+\cos t}{1+\cos\delta}\right)^n\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi

$$\int_\delta^\pi q_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$$

et par parité

$$\int_{-\pi}^{-\delta} q_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\delta}^\delta q_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ car $\int_{-\pi}^\pi q_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
b) On a

$$g_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^\pi q_n(t)(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t$$

Puisque f est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$, elle y est uniformément continue.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$|x-y|\leqslant\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$$

On a alors

$$\left|\int_{-\delta}^\delta q_n(t)(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\delta}^\delta \varepsilon q_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

Mais puisqu'on a aussi

$$\left|\int_\delta^\pi q_n(t)(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\left\|f\right\|_\infty\int_\delta^\pi q_n(t)\,\mathrm{d}t$$

pour n assez grand,

$$\left|\int_\delta^\pi q_n(t)(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

et finalement $|g_n(x)-f(x)|\leqslant 3\varepsilon$ indépendamment de x.
c) Par le changement de variable $u = x-t$ et par 2π-périodicité,

$$g_n(t) = \int_{-\pi}^\pi f(u)q_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

et en développant, cette expression se perçoit comme un polynôme trigonométrique.
On a démontré le théorème de Weierstrass dans sa version trigonométrique.

Exercice 4 : [énoncé]
Soit P un polynôme solution.
Le polynôme P est non nul, on peut introduire son degré n et l'écrire

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0$$

Puisque $\left|P(\mathrm{e}^{it})\right| = 1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $P(\mathrm{e}^{it})\overline{P(\mathrm{e}^{it})} = 1$.

Mais

$$P(\mathrm{e}^{it})\overline{P(\mathrm{e}^{it})} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} a_k\bar{a}_\ell \mathrm{e}^{i(k-\ell)t}$$

et en développant on obtient
$a_n\bar{a}_0\mathrm{e}^{int} + (a_n\bar{a}_1 + a_{n-1}\bar{a}_0)\,\mathrm{e}^{i(n-1)t} + (a_n\bar{a}_2 + a_{n-1}\bar{a}_1 + a_{n-2}\bar{a}_2)\,\mathrm{e}^{i(n-2)t} + \cdots +$
$(a_n\bar{a}_n + \cdots + a_0\bar{a}_0) + \cdots = 1$
On en déduit $a_n\bar{a}_0 = 0$, $a_n\bar{a}_1 + a_{n-1}\bar{a}_0 = 0, \ldots,$
$a_n\bar{a}_{n-1} + a_{n-1}\bar{a}_{n-2} + \cdots + a_1\bar{a}_0 = 0$ et $(a_n\bar{a}_n + \cdots + a_0\bar{a}_0) = 1$
Puisque $a_n \neq 0$, on obtient successivement $a_0 = 0$, $a_1 = 0, \ldots, a_{n-1} = 0$ et $|a_n|^2 = 1$
Ainsi $P(X) = aX^n$ avec $|a| = 1$.
Inversement, un tel polynôme est solution.

Exercice 5 : [énoncé]
Par Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{|c_n(f)|}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N}|c_n(f)|^2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t \times \frac{\pi^2}{6}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 6 : [énoncé]
a) $c_n(f') = inc_n(f)$ et $c_n(f') \to 0$ donc $c_n(f) = o(1/n)$.
b) $S_n(f) = c_0e_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_ke_k + \sum\limits_{k=1}^{n} c_{-k}e_{-k}$ avec $e_k : t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$ vérifiant $\|e_k\|_\infty = 1$.
Puisque $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ converge, on établit la convergence normale des séries de fonctions $\sum c_ne_n$ et $\sum c_{-n}e_{-n}$. Ainsi la suite $(S_n(f))$ des sommes partielles de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Notons $S(f)$ sa limite. Or $\|\,.\,\|_2 \leqslant \|\,.\,\|_\infty$ donc $S_n(f) \xrightarrow{\|\,.\,\|_\infty} S(f)$ entraîne $S_n(f) \xrightarrow{\|\,.\,\|_2} S(f)$ mais puisque f est continue, on a aussi $S_n(f) \xrightarrow{\|\,.\,\|_2} f$ et donc par unicité de limite $S(f) = f$.
Puisque les fonctions e_n sont $\mathcal{C}^1$ et vérifient $\|c_ne_n'\|_\infty = |n|\,|c_n|$, on peut par convergence normale affirmer que la fonction $S(f) = f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 7 : [énoncé]
a) $c_n(f^{(p)}) = (in)^pc_n(f)$ et $c_{|n|}(f^{(p)}) \to 0$ car les coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux tendent vers 0.
b) La série de Fourier de f, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc la somme de la série de Fourier de f est de classe $\mathcal{C}^p$ et de plus elle est égale à f car elle converge aussi quadratiquement vers la fonction continue f.

Exercice 8 : [énoncé]
a)

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Par 2π-périodicité,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\mathrm{e}^{-in(t+a)}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(1-\mathrm{e}^{ina})c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t) - f(t+a)\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Pour a tel que $na = \pi$,

$$2c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t) - f(t+\pi/n)\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

En exploitant l'inégalité proposée en hypothèse

$$2\,|c_n(f)| = M\frac{\pi^\alpha}{n^\alpha}$$

puis $|c_n(f)| \leqslant \frac{\mu}{n^\alpha}$ avec $\mu = \frac{1}{2}M\pi^\alpha$.

Exercice 9 : [énoncé]
($\Rightarrow$) immédiat par calcul.
($\Leftarrow$) Si $\forall n \in \mathbb{Z}^\star$, $c_n(f) = 0$ alors la série de Fourier de f est uniformément convergente et puisqu'elle converge en norme quadratique vers f, la limite uniforme de la série de Fourier de f ne peut être que f.
Ainsi la fonction f est constante.

Exercice 10 : [énoncé]
Notons S la série de Fourier de f et S_p les sommes partielles. Puisque f est continue :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)-S_p(t)|^2\,\mathrm{d}t\to 0$$
donc
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)-S(t)|^2\,\mathrm{d}t=0$$
car la suite de fonctions (S_p) converge uniformément vers f.
Ainsi la fonction $t\mapsto|f(t)-S(t)|^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle.

Exercice 11 : [énoncé]
a) f impaire donc $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=0$. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$:
$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t=2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$ donc $b_{2p}=0$ et $b_{2p+1}=\frac{4}{(2p+1)\pi}$. On a aussi pour $n\in\mathbb{Z}$: $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-i.nt}\mathrm{d}t=\frac{(1-(-1)^n)}{i.n\pi}$ pour $n\in\mathbb{N}^\star$ et 0 si $n=0$.
b) La fonction f étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier converge simplement vers la régularisée de f.
La convergence ne peut pas être uniforme car la fonction limite n'est pas continue.
c) La convergence simple de la série de Fourier vers $f(x)$ en $x=\pi/2$ donne :
$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4\sin\frac{(2p+1)\pi}{2}}{(2p+1)\pi}=\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}=1$ d'où $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}=\frac{\pi}{4}$. L'égalité de Parseval donne $\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{16}{(2p+1)^2\pi^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)^2\,\mathrm{d}t=1$ donc $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.
d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ existe et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}-\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Puisque f est paire : $\forall n\in\mathbb{N}^\star, b_n=0$. Pour $n\in\mathbb{N}$:
$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos nt\,\mathrm{d}t$.
Pour $n=0$: $a_0=\pi$. Pour $n>0$:
$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{n^2\pi}\left[\cos nt\right]_0^{\pi}=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}$
Aussi $c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,dt=\frac{\pi}{2}$ et pour $n\in\mathbb{Z}^\star$:
$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-i.nt}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos nt\mathrm{d}t=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$.
Par suite $S(f)(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nt=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$.
b) f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la convergence est donc normale a fortiori simple et uniforme.
c) $S(f)(t)=f(t)$. Pour $t=0$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.
Par la formule de Parseval :
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}a_{2k+1}^2=\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$
Or $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.
d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ existe et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. De même on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Sur $[0,\pi/2]$, on a
$$f(x)=4x^2-\pi^2$$
et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ avec
$$f_d'(0)=0\text{ et }f_g'(\pi/2)=4\pi$$
Sur $]\pi/2,\pi]$, on a
$$f(x)=8x\pi-3\pi^2-4x^2$$
et cette relation est aussi valable pour $x=\pi/2$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2,\pi]$ avec
$$f_d'(\pi/2)=4\pi\text{ et }f_g'(\pi)=0$$
Par parité et périodicité, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et un dessin serait sûrement très convainquant...) et f' est une fonction impaire, 2π-périodique avec
$$f'(t)=\begin{cases}8x & \text{si }x\in[0,\pi/2]\\ 8\pi-8x & \text{sinon}\end{cases}$$
a) Puisque la fonction f est paire, les coefficients b_n sont nuls et
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$
ce qui donne
$$a_{2n}=0\text{ et }a_{2n+1}=\frac{32.(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^3}$$

après quelques calculs pénibles, ou plus simplement après exploitation de la relation

$$b_n(f') = -na_n(f)$$

voire de la relation

$$a_n(f'') = nb_n(f') = -n^2 a_n(f)$$

et en considérant la pseudo dérivée d'ordre 2 de f.

c) Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est égale à sa somme de Fourier et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{32}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\cos((2n+1)t)$$

En évaluant pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Exercice 14 : [énoncé]

a) $a_{2n}(f) = \frac{(-1)^{n+1}4}{\pi(4n^2-1)}$ et $a_{2n+1}(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il y a donc convergence uniforme de la série de Fourier vers f. En $x = 0$, on obtient : $f(0) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}4}{\pi(4n^2-1)}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$.

Exercice 15 : [énoncé]

a) f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et régularisée donc développable en série de Fourier.
$a_n = 0$ et par intégration par parties $b_n = 1/n$.
Le développement en série de Fourier de f s'écrit

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$$

b) Pour $t = 1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$$

c) Par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)^2}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6\pi}\left[-(\pi-t)^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 16 : [énoncé]

a) $c_n(f) = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-in}$.

b) La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc la série de Fourier converge simplement vers la fonction $f^\star$ régularisée de f.
Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^\star(x) = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}\mathrm{e}^{inx}$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$\frac{\pi}{\mathrm{sh}\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}$$

Or

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-in} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{1-in}+\frac{1}{1+in}\right) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2}{n^2+1}$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{\mathrm{sh}\pi}\right)$$

De même avec $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(1+\pi\coth\pi\right)$$

Exercice 17 : [énoncé]

a) $b_n = 0$ pour $n \geqslant 1$ et $a_n = (-1)^{n-1}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série de Fourier de f converge normalement vers f car celle-ci est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite $f(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}\cos nx$.

b) Pour $x = 0$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(1-\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}\right)$ et pour $x = \pi$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1-\alpha\pi\cot\alpha\pi}{2\alpha^2}$.

c) Il y a convergence normale de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$ pour $\alpha \in [0,1/2]$ donc quand $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{\alpha\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$.
Quand $x \to 0$, $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x)$ donc quand $\alpha \to 0$, $\frac{1-\alpha\pi\cot\alpha\pi}{2\alpha^2} \to \frac{\pi^2}{6}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 18 : [énoncé]
a) $b_n = 0$ pour $n \geqslant 1$ et $a_n = (-1)^n \frac{2\alpha \mathrm{sh}\alpha\pi}{\pi(\alpha^2+n^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série de Fourier de f converge normalement vers f car celle-ci est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite

$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha\mathrm{sh}\alpha\pi}{\pi(\alpha^2+n^2)} \cos nx$$

b) Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha\pi}{\mathrm{sh}(\alpha\pi)} - 1\right)$$

et pour $x = \pi$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2} = \frac{\alpha\pi\coth(\alpha\pi) - 1}{2\alpha^2}$$

Exercice 19 : [énoncé]
a) $S(t)$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
b) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}$ et $b_n = 0$.
c) Puisque f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de convergence normale assure que la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$.
d) Pour $x = \pi$, on obtient :

$$\cos\alpha\pi = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi\cot\alpha\pi}{2\alpha}$$

puis

$$S(t) = -\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi\cot\alpha\pi}{2\alpha}$$

Exercice 20 : [énoncé]
Soit f la fonction 2π périodique paire définie sur $[0,\pi]$ par $f(t) = \sin t$. f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Sa série de Fourier converge donc normalement vers f et cela permet d'écrire

$$\forall t \in [0,\pi]\,, \sin t = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt)$$

d'où le résultat.

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n+1)t - \sin(n-1)t\,\mathrm{d}t$$

Si $n = 1$,

$$a_1(f) = 0$$

Si $n \neq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)t}{n+1}\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^\pi = -\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}$$

Exercice 21 : [énoncé]
Le problème est qu'ici f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux puisqu'elle n'admet de dérivée à droite et à gauche en 0.
Pour $n > 0$, on a $b_n = 0$ et

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n}\left[\sqrt{x}\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

donc

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n^{3/2}\pi}\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Or l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

est convergente comme on peut le vérifier à l'aide d'une intégration par parties sur $[1,+\infty[$
Par conséquent, $a_n = O\left(1/n^{3/2}\right)$ donc la série de Fourier de f est normalement convergente.
Etant continue, la série de Fourier converge en moyenne quadratique vers f et donc sa somme est égale à f.

Exercice 22 : [énoncé]

a) La fonction 2π-périodique étudiée est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont développable en série de Fourier.

$$a_n = \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \text{ et } b_n = 0$$

La valeur en 0 de ce développement permet d'établir :

$$1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

b) Par convergence normale, la fonction $\alpha \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-\alpha^2}$ est continue sur $[0, 1/2]$.

En passant à la limite quand $\alpha \to 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{\alpha\to 0} \left(\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} - 1\right)\right) = -\frac{\pi^2}{12}$$

c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{\alpha-1+n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n t^{\alpha-1+n}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^{\alpha-1+n}\,\mathrm{d}t$$

Par le critère spécial des séries alternées,

$$\left|\int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^{\alpha-1+n}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{\alpha+N}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+\alpha+1} \to 0$$

donc

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{\alpha-1+n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Par $u = 1/t$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u^{-\alpha}}{u+1}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}$$

par la même démarche qu'au dessus.

Par suite

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Exercice 23 : [énoncé]

a) $b_n = 0$ pour $n \geqslant 1$ et $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) La série de Fourier de f converge normalement vers f car celle-ci est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite

$$f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)} \cos(nx)$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$1 = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + 2\alpha^2 \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}$$

puis la relation voulue.

c) La fonction $f : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. On vérifie $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{\alpha-1}$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$ ce qui assure l'intégrabilité de f.

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1}$$

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

la convergence de la série étant acquise par le critère spécial des séries alternées.

$$\left|\int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{[0,1[} t^{N+\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+1+\alpha}$$

la majoration du reste étant obtenue par le critère spécial des séries alternées.

On peut alors affirmer

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Puisque

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{u^{-\alpha}}{u+1}\,\mathrm{d}u$$

on a aussi

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(1-\alpha)}$$

On en tire
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}$$
puis
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}$ sont absolument convergentes donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} + \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2} \right)$$
est paire.
b) Par translation d'indice, on observe que f est 2π-périodique.
Posons
$$f_n(x) = \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} + \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}$$
f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$ donc f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc développable en série de Fourier.
c)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{b^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \mathrm{e}^b}{b}$$
d) f est paire donc $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(t)\cos(nt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{a^2+(t-2n\pi)^2} + \frac{\cos(nt)}{a^2+(t+2n\pi)^2}\,\mathrm{d}t$$
Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,
$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a^2+(t-2n\pi)^2}\,\mathrm{d}t$$
En translatant les intégrales,
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u}{b^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$
avec $b = an$ pour $n \neq 0$ et $a_0 = \frac{1}{a}$.
e)
$$f(t) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{an}\cos(nt) = \frac{1}{a}\left(-1 + \mathrm{Re}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{a+it}}\right) = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{e}^a(\cos t - 1)}{1-2\mathrm{e}^a\cos t + \mathrm{e}^a}$$
(sauf erreur...)

Exercice 25 : [énoncé]
a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et régularisée donc développable en série de Fourier.
$a_n = 0$ et par intégration par parties $b_n = 1/n$.
Le développement en série de Fourier de f s'écrit
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = S(x)$$
b) Pour $x = 1$, on obtient
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$$
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue donc développable en série de Fourier.
$a_n = 0$ et
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\pi-1}{2} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi} \frac{\pi-t}{2}\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$
Après calculs
$$b_n = \frac{\sin n}{n^2}$$
On a alors
$$g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$
c) Par la formule de Parseval
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{(\pi-1)^2}{6}$$

Exercice 26 : [énoncé]
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)a_n(g)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(g)|^2 < +\infty$$

La série servant à définir h s'avère donc normalement convergente d'où l'existence, la continuité de h et la reconnaissance immédiate de ses coefficients de Fourier.
De plus

$$\frac{1}{2}|h(x)| \leqslant \frac{|a_0(f)a_0(g)|}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)a_n(g)| \leqslant \sqrt{\frac{|a_0(f)|^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2}\sqrt{\frac{|a_0(g)|^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(g)|^2}$$

Par l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2}|h(x)| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \|f\|_\infty\|g\|_\infty$$

et on conclut.

Exercice 27 : [énoncé]
D'une part

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{1-t\mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^{-i\theta}-t}\,\mathrm{d}t$$

ce qui justifie l'existence de l'intégrale. On peut alors calculer sa partie réelle

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{-i\theta}-t}\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-t}{|\mathrm{e}^{-i\theta}-t|^2}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1\frac{\cos\theta-t}{(\cos\theta-t)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}t = -\ln\left(2\sin(\theta/2)\right)$$

D'autre part

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{n=0}^{N}t^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}t + \int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N}\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{n+1}+\varepsilon_N$$

avec

$$|\varepsilon_N| = \left|\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1\frac{t^{N+1}\mathrm{e}^{i(N+2)\theta}}{1-t\mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1\frac{t^{N+1}}{m_\theta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m_\theta(N+2)} \to 0$$

où

$$m_\theta = \min\left\{\left|1-t\mathrm{e}^{i\theta}\right|/t\in[0,1]\right\} > 0$$

Ainsi

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{n+1}$$

puis

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercice 28 : [énoncé]
a) La fonction f est paire donc $b_n = 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.
On obtient $a_0 = \frac{2\alpha}{\pi}$ et $a_n = \frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi}$ pour $n\in\mathbb{N}^\star$.
La série de Fourier est alors

$$\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n\geqslant1}\frac{\sin(n\alpha)\cos(nt)}{n}$$

En vertu du théorème de Dirichlet, celle-ci converge en tout point vers la régularisée de f car la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Puisque la régularisée de f n'est pas continue, cette convergence ne peut pas être uniforme.
b) La régularisée de f prend respectivement les valeurs 1 et 1/2 en 0 et α.
c) Par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$$

On en déduit après calculs

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$$

d) La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.
En découpant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\alpha}\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}+\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\alpha}\left[\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}-\frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right]\mathrm{d}t$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{2\sin t}{t^3}(t\cos t - \sin t)$$

Puisque φ' est continue et puisque

$$t^{3/2}\varphi(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \text{ et } t^{3/2}\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall t \in]0,+\infty[\,, |\varphi'(t)| \leqslant \frac{M}{t^{3/2}}$$

et en particulier

$$\forall t \in [n\alpha,(n+1)\alpha]\,, |\varphi'(t)| \leqslant \frac{M}{(n\alpha)^{3/2}}$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$\left|\int_0^{\alpha}\left[\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}-\frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right]\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\alpha} t\frac{M}{(n\alpha)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}}M$$

puis

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\alpha}\left[\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}-\frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right]\mathrm{d}t\right| \leqslant M\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}} = C\sqrt{\alpha}$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi-\alpha}{2}+O(\sqrt{\alpha})$$

et quand $\alpha \to 0^+$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 29 : [énoncé]
a) En représentant la fonction g, on peut voit qu'à la valeur en 0 $[2\pi]$ près, cette fonction est impaire.
Par suite

$$a_n(g) = 0 \text{ et } b_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n}$$

b) Puisque f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux f est développable en série de Fourier et donc

$$\forall t \in [0,2\pi]\,, f(t) = \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt))$$

De plus, il y a convergence normale de cette série de Fourier. On a alors

$$\forall t \in [0,2\pi]\,, (\pi-t)f(t) = \frac{a_0(f)}{2}(\pi-t)+\sum_{n=1}^{+\infty}(\pi-t)\left(a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt)\right)$$

avec convergence normale de la série de fonctions sous-jacente. On peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[0,2\pi]$ cette série de fonctions continues et ainsi obtenir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0(f)}{4\pi}(\pi-t)\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n(f)}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t+\frac{b_n(f)}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi$$

En reconnaissant les coefficients de Fourier de g déjà calculés

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n}$$

c) Par polarisation

$$\int_0^{2\pi}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\int_0^{2\pi}\left(f(t)+g(t)\right)^2\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(f(t)-g(t)\right)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

Par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t)\pm g(t)\right)^2\,\mathrm{d}t = \frac{a_0(f\pm g)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f\pm g)^2+b_n(f\pm g)^2\right)$$

avec $a_n(f\pm g) = a_n(f)\pm a_n(g)$ et $b_n(f\pm g) = b_n(f)\pm b_n(g)$.
On en déduit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0(f)a_0(g)}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)a_n(g)+b_n(f)b_n(g))$$

puis la relation voulue.

Exercice 30 : [énoncé]
Soit g la fonction impaire 2π-périodique obtenue à partir de f.
g est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc développable en série de Fourier.
Ceci permet d'écrire $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
En posant $a_n = nb_n$, on a la relation $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin(nx)$ pour $x \in [0,\pi]$
Les coefficients de Fourier de g' se déduisant de ceux de g par intégration par parties et sachant $\int_0^{2\pi} g'^2 = 2$, la formule de Parseval appliquée à g' donne $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}$.

Exercice 31 : [énoncé]
a) Par contraposée, supposons la convergence de $\sum a_n$. La suite (a_n) tend alors vers 0 et est donc bornée par un certain $m \in \mathbb{R}^{+\star}$. On a alors

$$|f(z)| \leqslant m \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = m\mathrm{e}^{|z|}$$

donc

$$M(r) \leqslant m\mathrm{e}^r$$

puis

$$\frac{\ln M(r)}{r} \leqslant \frac{\ln m + r}{r} \to 1$$

donc $\ell \leqslant 1$.
b) Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, on a

$$f(r\mathrm{e}^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} r^n \mathrm{e}^{int}$$

Par convergence normale de la série de fonctions sous-jacente

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} r^k \delta_{k,n} = \frac{a_n}{n!} r^n$$

puis

$$\left|\frac{a_n}{n!} r^n\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{it})\right| \mathrm{d}t \leqslant M(r)$$

et enfin l'inégalité demandée.

c) Supposons $\ell < 1$ et introduisons $q \in \left]\ell, 1\right[$. Pour r assez grand, on a

$$\frac{\ln M(r)}{r} \leqslant q$$

et donc

$$M(r) \leqslant \mathrm{e}^{qr}$$

En prenant $r = n$, on a pour n assez grand

$$|a_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{nq}}{n^n} n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{\mathrm{e}^{nq}}{\mathrm{e}^n} = \sqrt{2\pi n}.\alpha^n$$

avec $\alpha = \mathrm{e}^q/\mathrm{e}$ vérifiant $|\alpha| < 1$.
Puisque la série de terme général $\sqrt{2\pi n}\alpha^n$ converge, un argument de comparaison de série à termes positifs assure l'absolue convergence et donc la convergence de $\sum a_n$.

Exercice 32 : [énoncé]
Posons k_n la partie entière de $n/2\pi$. On peut écrire

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi k_n} f(x+t) f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon_n(x)$$

avec

$$|\varepsilon_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \int_{2\pi k_n}^{n} \|f\|_\infty^2 \leqslant \frac{2\pi}{n} \|f\|_\infty^2$$

En introduisant le produit scalaire hermitien usuelle sur l'espace des fonctions complexes continues 2π périodiques

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi k_n} f(x+t) f(t) = k_n \left\langle f_x \mid f \right\rangle$$

avec $f_x : t \mapsto f(x+t)$.
En notant $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier exponentiels de f, celle de f_x est $\left(c_n \mathrm{e}^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ et donc

$$\left\langle f_x \mid f \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \mathrm{e}^{inx}$$

Posons

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui définit une fonction continue 2π-périodique.
On a
$$F_n(x) = \frac{2\pi k_n}{n} F(x) + \varepsilon(x)$$
et donc
$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \frac{n - 2\pi k_n}{n} |F(x)| + |\varepsilon(x)|$$
puis
$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \frac{2\pi}{n} \|F\|_\infty + \frac{2\pi}{n} \|f\|_\infty^2$$
Puisque ce majorant ne dépend pas de x,
$$\|F_n - F\|_\infty \leqslant \frac{2\pi}{n} \|F\|_\infty + \frac{2\pi}{n} \|f\|_\infty^2 \to 0$$
et donc la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$.
b) On a
$$|F_n(x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \left|\mathrm{e}^{inx}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = F(0)$$
donc
$$\|F\|_\infty \leqslant F(0)$$

Exercice 33 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples
$$\frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2} = \frac{a}{t - \mathrm{e}^{ix}} + \frac{\bar{a}}{t - \mathrm{e}^{-ix}}$$
avec
$$a = \frac{\sin x}{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}} = \frac{1}{2i}$$
donc
$$\frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\frac{1}{t - \mathrm{e}^{ix}}\right) = \mathrm{Re}\left(i\mathrm{e}^{-ix}\frac{1}{1 - t\mathrm{e}^{-ix}}\right)$$
puis
$$\frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin(n+1)x$$
La fonction étudiée étant impaire $a_n = 0$.
Par convergence normale obtenue via $|t| < 1$, on a $b_{n+1} = t^n$
Ainsi l'écriture précédente est le développement en série de Fourier de la fonction étudiée.

Exercice 34 : [énoncé]
$\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\cos x + i\sin x}\right) = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\cos(nx)$.
Il reste à justifier que ce développement correspond au développement en série de Fourier de la fonction.
Puisque la fonction est paire, $b_n = 0$.
On a
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$
Par convergence normale de la série de fonctions engagée,
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n!}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2$$
On a
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}\cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$
Par convergence normale de la série de fonctions engagée,
$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{m!}\cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$
Or $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$ si $m \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \pi$ si $m = n \neq 0$.
Ainsi $a_n = \frac{1}{n!}$.
Finalement, l'écriture
$$\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\cos(nx)$$
est bien le développement en série de Fourier de la fonction considérée.

Exercice 35 : [énoncé]
$$\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - (\mathrm{e}^{it}z)} + \frac{1}{1 - (\mathrm{e}^{-it}z)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int})z^n$$
puis
$$\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nt)z^n$$

avec convergence normale sur $[0,\pi]$. Par suite

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2}\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}z^n$$

compte tenu de l'orthogonalité des fonctions $t \mapsto \cos(kt)$.

Exercice 36 : [énoncé]

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)!} = \mathrm{Re}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{\mathrm{e}^{i(2p+1)x}}{(2p+1)!}\right) = \mathrm{Re}(\sin(\mathrm{e}^{ix}))$$

or $\sin(\mathrm{e}^{ix}) = \sin(\cos x + i\sin x) = \sin(\cos x)\mathrm{ch}(\sin x) + i\mathrm{sh}(\sin x)\cos(\cos x)$ donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)!} = \sin(\cos x)\mathrm{ch}(\sin x)$$

Exercice 37 : [énoncé]

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on peut écrire

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{int}}{n!}$$

Puisque la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n!}$ converge, on peut par convergence normale calculer les coefficients de Fourier de f en intégrant terme à terme

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t$$

Et puisque

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = \delta_{k,0}$$

on obtient

$$c_p(f) = \begin{cases} 1/p! & \text{si } p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Par la formule de Parseval

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

avec

$$|f(t)|^2 = f(t)\overline{f(t)} = \exp\left(\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}\right) = \exp(2\cos t)$$

Exercice 38 : [énoncé]

a) On a

$$\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}r^{|k|} = -1 + \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}r^k + \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-ik\theta}r^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{i\theta}} + \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{-i\theta}} - 1 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + \cdots}$$

b) Par ce qui précède

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{r^{|n|}}{1 - r^2}\mathrm{e}^{int}$$

Puisque les séries $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{r^n}{1-r^2}\right|$ et $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{r^{-n}}{1-r^2}\right|$ convergent, on peut affirmer que l'écriture précédente est le développement en série de Fourier de f_r.
On en déduit le développement en série de Fourier trigonométrique

$$f_r(t) = \frac{1}{1 - r^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2r^n}{1 - r^2}\cos(nt)$$

Exercice 39 : [énoncé]

a) $\frac{1-t^2}{1-2t\cos x+t^2} = -1 + \frac{1}{1-t\mathrm{e}^{ix}} + \frac{1}{1-t\mathrm{e}^{-ix}}$ donc $\frac{1-t^2}{1-2t\cos x+t^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(nx)t^n$ pour $|t| < 1$.

b) $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ avec $t = \tan\frac{\alpha}{2} \in \left]-1,1\right[$ donc

$$\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha\cos x} = \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos x + t^2}$$

puis

$$\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha\cos x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(nx)\tan^n\frac{\alpha}{2}$$

pour $x \in \left]0,\pi\right[$.
Par parité cette égalité vaut aussi pour $x \in \left]-\pi,0\right[$. De plus par convergence normale de la série et donc continuité des fonctions engagées cette égalité vaut encore sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité.
Enfin la convergence normale de la série de fonctions permet aussi d'assurer qu'on a bien affaire au développement en série de Fourier recherché.

Exercice 40 : [énoncé]
a) Considérons la fonction

$$g_r : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n(\mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int})$$

Puisque la série $\sum r^n$ converge, la série de fonctions définissant g_r converge normalement et par suite g_r est bien définie, continue et 2π-périodique.
De plus, par convergence normale, on peut affirmer que les coefficients de Fourier de g_r sont les $c_n(g) = r^{|n|}$.
On a alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(t)\overline{g_r(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g_r)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|}$$

b) Par sommation géométrique

$$g_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{-int} = \sum_{n=0}^{+\infty}(r\,\mathrm{e}^{-it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(r\,\mathrm{e}^{it})^n = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$$

Il est alors immédiat d'affirmer que g_r est à valeurs réelles positives.
c) On a

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(t)\overline{g_r(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\|f\|_\infty\, g_r(t)\,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty\, c_0(g) = \|f\|_\infty$$

La série $\sum c_n$ est une série à termes positifs. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} c_n = \lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{N} c_n r^n$$

Or

$$\left|\sum_{n=0}^{N} c_n r^n\right| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} \leqslant \|f\|_\infty$$

donc

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \leqslant \|f\|_\infty$$

Puisque les sommes partielles de la série $\sum c_n$ sont majorées et puisque celle-ci est à termes positifs, on peut affirmer qu'elle converge. Il en est de même pour la série $\sum c_{-n}$.
Il est alors facile d'établir la convergence normale de la série de Fourier de f et donc sa convergence. De plus, lorsqu'une série de Fourier converge normalement, elle converge aussi en norme quadratique et alors sa limite ne peut que la fonction développée.

Exercice 41 : [énoncé]
a) On a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)r^{|n|}\mathrm{e}^{in(x-t)}\,\mathrm{d}t$$

La série des intégrales des valeurs absolues converge grâce au terme géométrique $r^{|n|}$, ceci permet d'échanger somme et intégrale afin d'affirmer

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(x-t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$P_r(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{inu}$$

On a

$$P_r(u) = \frac{1}{1-r\mathrm{e}^{iu}} + \frac{1}{1-r\mathrm{e}^{-iu}} - 1 = \frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2}$$

donc $P_r \in E$.
b) En permutant à nouveau somme et intégrale, $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$ car $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta_{0,n}$.
c) Par translation et 2π-périodicité,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x-t)-f(x)\right)P_r(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité de f sur $[-\pi,\pi]$ assure l'existence d'un $\delta > 0$ vérifiant :

$$|x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\left(f(x-t)-f(x)\right)P_r(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} P_r(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

en ayant observé $P_r \geqslant 0$.
D'autre part,

$$\int_{\delta}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, P_r(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$$

en vertu d'une convergence dominée par $\frac{2\|f\|_\infty}{(1-\cos\delta)^2}$.
De même

$$\int_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - f(x))\, P_r(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$$

Ainsi pour r assez proche de 1^-,

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} c_n(f) \mathrm{e}^{inx} - f(x)\right| \leqslant 3\varepsilon$$

Finalement

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} c_n(f) \mathrm{e}^{inx} = f(x)$$

Exercice 42 : [énoncé]
a) Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, |r^p \cos(px)| \leqslant r^p$$

et puisque la série $\sum r^p$ converge, on peut affirmer que la fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car somme d'une série normalement convergente de fonctions continues.
b) On a

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} r^p \cos(p(x-t)) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque

$$\forall t \in [0, 2\pi], |r^p \cos(p(x-t)) f(t)| \leqslant \|f\|_\infty r^p$$

Par convergence normale d'une série de fonctions continues, on peut intégrer terme à terme

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} r^p \cos(p(x-t)) f(t)\,\mathrm{d}t$$

En développant

$$\cos(p(x-t)) = \cos(px)\cos(pt) + \sin(px)\sin(pt)$$

on obtient

$$F(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} r^p \left(a_p(f)\cos(px) + b_p(f)\sin(px)\right)$$

Puisque les suites $(a_p(f))$ et $(b_p(f))$ sont bornées, les séries $\sum r^p a_p(f)$ et $\sum r^p b_p(f)$ sont absolument convergentes et on peut, par convergence normale, reconnaître les coefficients de Fourier de F à partir de ce développement trigonométrique

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p(F) = r^p a_p(f) \text{ et } b_p(F) = r^p b_p(f)$$

Exercice 43 : [énoncé]
a) Puisque f est $\mathcal{C}^1$, on a par intégration par parties $c_n(f') = inc_n(f)$.
b) Puisque $\int_0^{2\pi} f = 0$, on a $c_0(f) = 0$. D'autre part $\int_0^{2\pi} f' = 0$, donc $c_0(f') = 0$.
Par l'égalité de Parseval :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

et

$$\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2$$

Or

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|$$

donc

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

avec égalité si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{Z}^\star, |c_n(f)| = |c_n(f')| = n\,|c_n(f)|$$

Ceci implique $c_n(f) = 0$ pour tout $n \neq \pm 1$ et, puisque la série converge normalement vers f, f est de la forme $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{it} + \mu \mathrm{e}^{-it}$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 44 : [énoncé]
Considérons la fonction g définie sur $[-\pi,\pi]$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(t/\pi) & \text{si } t \in [0,\pi] \\ -f(-t/\pi) & \text{si } t \in [-\pi,0[\end{cases}$$

La fonction g est continue en 0 car $f(0)=0$.
Par construction la fonction g est impaire.
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$ car $g_d'(0) = \frac{1}{\pi}f'(0) = g_g'(0)$.
Puisque $g(\pi) = f(1) = 0 = g(-\pi)$, on peut prolonger la fonction g en une fonction 2π-périodique et cette fonction est encore de classe $\mathcal{C}^1$ car
$g_g'(\pi) = \frac{1}{\pi}f'(1) = g_d'(-\pi)$.
Enfin, par imparité de g

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

En vertu de l'inégalité de Wirtinger

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} g'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Par parité, on en déduit

$$\int_{0}^{\pi} g(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{0}^{\pi} g'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Puis on obtient alors facilement

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

Pour $f(t) = \sin(\pi t)$ les hypothèses sont vérifiées avec

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \text{ et } \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2}$$

La constante de majoration ne peut donc être améliorée.

Exercice 45 : [énoncé]
Par le théorème de convergence normale, la fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier ce qui permet d'écrire

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{int}$$

avec $c_0(f) = 0$ car la fonction f est supposée d'intégrale nulle.
Sachant $c_n(f') = inc_n(f)$, on a encore

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{1}{in}c_n(f')\mathrm{e}^{int}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|f(t)|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}\frac{1}{n^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}|c_n(f')|^2$$

Or

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}\frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

et par la formule de Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}|c_n(f')|^2 \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$|f(t)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}\left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

et l'on peut donc conclure.

Exercice 46 : [énoncé]
Une telle fonction f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est égale à la somme de sa série de Fourier. On peut donc écrire $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{int}$ avec $c_{|n|} = o\left(1/n^k\right)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. On a $f''(t) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2c_n\mathrm{e}^{int}$ donc $f''(t) + \mathrm{e}^{int}f(t) = 0$ donne $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_{n-1} - n^2c_n)\mathrm{e}^{int} = 0$. Puisque la série étudiée converge normalement sur $\mathbb{R}$, $c_{n-1} = n^2c_n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. On en déduit $c_n = 0$ pour tout $n<0$ et
$c_n = c_0/(n!)^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 47 : [énoncé]
a) On vérifie que

$$\tilde{y} : x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(y(0) + \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t\right)$$

est solution de l'équation différentielle et vérifie $\tilde{y}(0) = y(0)$ donc par le théorème de Cauchy, $\tilde{y} = y$.
b) Si y est 2π-périodique alors $y(0) = y(2\pi)$.
Inversement, si $y(0) = y(2\pi)$ alors $z : x \mapsto y(x + 2\pi)$ est solution de l'équation différentielle et vérifie $z(0) = y(0)$ donc $z = y$.
Par suite y est 2π-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(2\pi)$ i.e.

$$y(0)(\mathrm{e}^{2\pi\alpha} - 1) = \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

avec $\mathrm{e}^{2\pi\alpha} - 1 \neq 0$.
c) Par suite, il existe une unique solution ϕ 2π-périodique à l'équation différentielle, solution déterminée par

$$\phi(0) = \frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi\alpha} - 1}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

(avec $\mathrm{e}^{2\pi\alpha} \neq 1$ car $\alpha \notin i\mathbb{Z}$).
d) Cette solution est de classe $\mathcal{C}^1$ donc développable en série de Fourier.

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{inx}$$

avec

$$c_n = c_n(\phi) = \frac{1}{\alpha}c_n(f - \phi') = \frac{1}{\alpha}\left(c_n(f) - c_n(\phi')\right)$$

et

$$c_n(\phi') = inc_n(\phi)$$

donc

$$c_n = \frac{c_n(f)}{in + \alpha}$$

Exercice 48 : [énoncé]
a) On a par intégration par parties

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

et

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(t+\lambda)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{in\lambda}\int_{2\pi} f(t+\lambda)\mathrm{e}^{-in(t+\lambda)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{in\lambda}c_n(f)$$

On en déduit la relation proposée.
b) Si l'égalité

$$in = \mathrm{e}^{in\lambda}$$

est vérifiée alors nécessairement $|n| = 1$ et alors
$\mathrm{e}^{i\lambda} = i$
Si la condition $\mathrm{e}^{i\lambda} = i$ n'est pas vérifiée alors la propriété

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (in - \mathrm{e}^{in\lambda})c_n(f) = 0$$

entraîne

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0$$

et donc f est la fonction nulle (en vertu de la formule de Parseval ou parce que f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc développable en série de Fourier...)
Inversement, si $\mathrm{e}^{i\lambda} = i$ alors les fonctions

$$f(t) = \alpha\mathrm{e}^{it} + \beta\mathrm{e}^{-it}$$

vérifient la relation (*) (et ce sont les seules) est parmi celles-ci figurent des fonctions non nulles.
On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions 2π-périodiques non nulles vérifiant (*) est que $\mathrm{e}^{i\lambda} = i$ i.e.

$$\lambda \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$$